

基于 ADMM 改进的低截获 FDA-MIMO 雷达发射波束设计

巩朋成^{1,2}, 吴云韬^{1,2}

(1. 武汉工程大学计算机科学与工程学院, 湖北 武汉 430205; 2. 智能机器人湖北省重点实验室, 湖北 武汉 430205)

摘要: 针对信号依赖性杂波与目标位于同一方向上的低截获问题, 结合交替方向乘法 (ADMM), 提出了一种改进的频控阵 MIMO 雷达发射波束设计方法。该方法在保证每个天线上发射能量恒定和信杂噪比限制下, 最小化目标区域 (距离-方位) 的能量辐射。首先, 利用广义瑞利熵获得接收滤波器; 然后, 为了解决分式规划不等式约束的二次规划问题, 利用辅助变量, 并结合 ADMM 通过并行处理获得发射波束的优化解; 最后, 进一步研究了收敛性和计算复杂度。仿真显示, 与半正定规划方法相比, 所提方法能有效控制发射功率恒定, 且很好地在目标处能量聚焦; 另外, 所提方法在杂波和干扰处形成了 -50 dB 以上的零陷, 有效抑制了杂波和干扰信号。

关键词: MIMO 雷达; 频控阵; 发射波束设计; 交替方向乘法

中图分类号: TN958

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2022065

Improved transmit beamforming design based on ADMM for low probability of intercept of FDA-MIMO radar

GONG Pengcheng^{1,2}, WU Yuntao^{1,2}

1. School of Computer Science and Engineering, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430205, China

2. Hubei Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan 430205, China

Abstract: Considering the low probability of intercept problem that the signal-dependent interference and the target were located in the same angle, an improved transmit beamforming design based on the alternating direction method of multipliers (ADMM) was proposed for multiple-input multiple-output with frequency diverse array radar. The transmit energy was minimized at the target under constraints of the energy at each transmitter and signal clutter-plus-noise ratio requirement. Subsequently, a cyclic algorithm was developed to tackle the non-convex design problem. Firstly, the optimal receive filter was obtained by generalized Rayleigh quotient. And then the transmit beamforming was optimized by employing auxiliary variables and ADMM to solve quadratic programming problem with fractional inequality constraint. Moreover, both the convergence and computational complexity of the proposed algorithm were discussed. Simulation results show that, compared with the semi-definite programming method, the proposed method not only attains the given antenna power, but also achieves the better mainlobe focusing performance at the target. Furthermore, the null levels at the clutter locations and the jamming directions obtained by the proposed method are -50 dB above.

Keywords: MIMO radar, frequency diverse array, transmit beamforming design, alternating direction method of multipliers

0 引言

低截获 (LPI, low probability of intercept) [1] 雷达能够在探测目标的同时降低被敌方发现的概

率, 为雷达及其载体的安全性提供保障。LPI 技术在雷达发射端的研究包括三方面 [2]: 1) 将能量分散在频率域中, 设计宽带波形; 2) 将能量分散在时间域中, 设计高占空比波形; 3) 将能量分散在

收稿日期: 2021-12-10; 修回日期: 2022-03-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 62071172, No. 61771353)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62071172, No.61771353)

空间域中,设计宽发射天线波束。本文研究在雷达完成正常探测任务前提下,尽可能降低雷达在目标区域的发射功率。

首先,雷达目标检测的性能依赖于输出信干噪比(SINR, signal to interference plus noise ratio)。近年来,关于最大化输出 SINR 的波形设计得到关注,其分为两类。

一类是通过联合设计发射波形和接收滤波器使输出 SINR 最大化。文献[3]提出了一种杂波条件下最大化多输入多输出(MIMO, multiple-input multiple-output)雷达输出 SINR 的发射波形和接收滤波器的循环优化方法,并将该优化方法扩展到了带约束(如恒模和相似性)的波形设计。同样,Cui等[4]为了增强信号依赖性杂波下运动目标检测,提出一种恒模和相似性约束下联合设计空时发射编码和接收滤波器的迭代方法,该方法在每次迭代中将非凸的最大化 SINR 问题转化为凸优化问题求解。文献[5]提出了慢速运动目标情况下峰均比和发射功率约束的 MIMO 雷达发射波形和接收滤波器联合设计方法,该方法利用半正定规划(SDP, semi-definite programming)技术求解发射波形和接收滤波器。文献[6]提出了一种基于优化最小化(MM, majorization-minimization)方法的 MIMO 雷达发射波形和滤波器联合设计。针对同样的带约束波形设计问题,Cheng等[7]提出了一种联合块连续上界最小化(BSUM, block successive upper-bound minimization)方法和有效集合法(ASM, active set method)设计发射波形的循环优化方法。

另一类是联合设计发射和接收波束成形使输出 SINR 最大化。文献[8]提出了一种基于最大化 SINR 进行联合优化发射加权矩阵和接收滤波器的循环优化方法,但其缺点是利用优化工具包 CVX 求解发射加权矩阵。为了有效地抑制干扰信号并进一步提高雷达系统的性能,黄俊生等[9]提出了一种基于二维相控阵 MIMO 雷达的联合发射子阵划分和波束成形的的设计方法。针对子孔径 MIMO 雷达最大化 SINR 问题,文献[10]提出了一种功率约束的发射和接收波束成形联合设计方法。Cheng等[11]也研究了杂波和波形相似性约束下最大化 MIMO 雷达 SINR 问题,并提出了一种基于 SDP 方法的发射和接收波束成形联合优化方法。

其次,多数研究 LPI 雷达的文献利用相控阵实现特定方向的能量控制,而频控阵(FDA, frequency

diverse array)[12-13]可实现不同距离处发射功率控制,这为 LPI 雷达实现特定区域能量控制的应用提供了可能。FDA 雷达的概念是 Antonik 等[14]在 IEEE 雷达年会上提出的,其通过相邻阵元增加一个较小的频率步进量,其发射导向向量不仅依赖于角度,而且依赖于距离,即产生了具有角度和距离依赖性的发射波束。利用 FDA 的发射方向图和能量分布可以控制的特性,Wang[15]考虑了动目标跟踪的射频隐身波束成形方法,基于频控阵的特性,利用稀疏模型设计了频控阵 MIMO (FDA-MIMO) 雷达的发射波束矩阵[16],以减少采样快拍数的同时获得足够的距离和角度分辨率,实现了多个目标的距离和角度的联合估计。针对干扰与目标位于同一个波束内的目标检测问题,廖桂生教授团队[17]利用 FDA 的距离角度依赖性,研究了基于 FDA-MIMO 雷达对抗欺骗式干扰的原理,进一步提出了基于多假设检验的干扰样本挑选方法。

为了解决信号依赖性杂波散射体与目标位于同一方向上的低截获问题,本文提出一种基于交替方向乘法(ADMM, alternating direction method of multipliers)[18]的 FDA-MIMO 雷达发射波束设计方法。本文主要的研究工作如下。1) 优化准则,本文方法是在保证每个天线上发射能量恒定和输出 SINR 约束下,最小化目标区域(距离-方位)的辐射能量。2) 优化发射波束时,本文没有利用二阶二次近似方法,而是利用辅助变量和 ADMM 相结合,解决分式规划不等式约束的二次规划问题。3) 分析了本文方法的收敛性和计算复杂度。仿真实验证明了本文方法的有效性。

1 信号模型及问题描述

1.1 FDA-MIMO 雷达信号模型

不失一般性,考虑由 M_t 个发射天线和 M_r 个接收天线构成的窄带 FDA-MIMO 雷达系统,其第 m 个天线上的发射信号形式可表示为

$$\begin{aligned} x_m(t) &= \mathbf{w}_m \tilde{\mathbf{s}}(t) \exp\{j2\pi f_m t\} \\ 0 \leq t \leq T_n, \quad m &= 1, 2, \dots, M_t \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $\tilde{\mathbf{s}}(t) = [\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t), \dots, \tilde{s}_K(t)]^T \in C^{K \times 1}$ 为包含 K 个正交波形的基带调制信号; $\mathbf{w}_m \in C^{1 \times K}$ 为发射波束加权矢量; $f_m = f_0 + (m-1)\Delta f$ 为第 m 个天线上的载波频率, f_0 为雷达工作频率, Δf 为频率步进量,且 $\Delta f \leq f_0$, $K \leq M_t$; T_n 为雷达脉冲持续时间。

假设空间远场除了感兴趣的点目标外, 存在 Q 个信号依赖性的杂波散射体, L 个来自不同方向的干扰, 且第 q 个杂波位于 $(r_{c,q}, \theta_{c,q})$ 空间位置, 以及第 l 个干扰的角度为 $\theta_{j,l}$ 。于是, 发射信号经目标空间后在接收端通过下变频和匹配滤波的信号为

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = & \beta(r, \theta)(\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r})[\mathbf{a}(r, \theta) \otimes \mathbf{b}(\theta)] + \\ & \sum_{q=1}^Q \beta_{c,q}(\mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r})[\mathbf{a}(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \otimes \mathbf{b}(\theta_{c,q})] + \\ & \sum_{l=1}^L \beta_{j,l}[\bar{\mathbf{s}}_{j,l} \otimes \mathbf{b}(\theta_{j,l})] + \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2)$$

其中, 各因式说明如下。

1) $\beta(r, \theta)$ 表示目标所对应的散射系数, \otimes 表示 Kronecker 积, \mathbf{I}_{M_r} 表示 $M_r \times M_r$ 阶的单位矩阵, $\mathbf{a}(r, \theta)$ 和 $\mathbf{b}(\theta)$ 分别表示发射和接收阵列的导向向量。

$$\mathbf{a}(r, \theta) = \left[e^{j\frac{2\pi}{c}r\Delta\phi_1}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{c}r\Delta\phi_m}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{c}r\Delta\phi_{M_t}} \right]^T \quad (3)$$

$$\mathbf{b}(\theta) = \left[1, e^{-j\frac{2\pi f_0 d_r \sin\theta}{c}}, \dots, e^{-j\frac{2\pi f_0 (M_r-1) d_r \sin\theta}{c}} \right]^T \quad (4)$$

其中, c 表示光速, $\Delta\phi_m = -f_0(m-1)d_t \sin\theta - (m-1)\Delta f d_t \sin\theta + (m-1)r\Delta f$, d_t 和 d_r 表示发射和接收阵列的阵元间隔。

2) \mathbf{W} 表示发射波束矩阵, 其形式为

$$\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{M_t}]^T \quad (5)$$

3) $\beta_{c,q}$ 、 $r_{c,q}$ 和 $\theta_{c,q}$ 分别表示第 q 个杂波散射体的散射系数、距离和角度信息, 且杂波的协方差为 $\delta_{c,q}^2 = E[\beta_{c,q} \beta_{c,q}^H]$ 。

4) $\bar{\mathbf{s}}_{j,l}$ 表示包含干扰信号的随机向量, 且服从零均值高斯分布; $\beta_{j,l}$ 表示第 l 个干扰信号的散射系数, 其服从均值为零和协方差为 $\delta_l^2 = E[|\beta_{j,l}|^2]$ 的循环对称高斯分布, $E[\cdot]$ 表示取期望。

5) \mathbf{e} 表示均值为零、协方差为 σ_e^2 的复高斯噪声。

观察式(1)和式(3)可知, FDA-MIMO 雷达通过相邻阵元增加一个较小的频率步进量, 其发射导向向量不仅依赖于角度, 也依赖于距离, 即产生了具有角度和距离依赖性的发射波束, 这一特性为实现不同距离处发射功率控制、以降低雷达被截获概率提供可能。

1.2 问题描述

设接收滤波器为 $\mathbf{x} \in C^{M_r K \times 1}$, 则接收信号经过滤波器后的输出信杂噪比 (SCNR, signal clutter-plus-noise ratio) 为

$$\text{SCNR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) = \frac{E\left[|\mathbf{x}^H \mathbf{y}_s|^2\right]}{\mathbf{x}^H E\left[\mathbf{y}_c \mathbf{y}_c^H + \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^H + \mathbf{e} \mathbf{e}^H\right] \mathbf{x}} = \frac{\delta_t^2 \left| \mathbf{x}^H \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta) \right|^2}{\mathbf{x}^H (\mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e) \mathbf{x}} \quad (6)$$

其中, $\delta_t^2 = E\left[|\beta(r, \theta)|^2\right]$ 表示目标的协方差, $\mathbf{v}(r, \theta) = \mathbf{a}(r, \theta) \otimes \mathbf{b}(\theta)$ 表示“虚拟阵列”的导向向量; $\tilde{\mathbf{W}}$ 表示 \mathbf{W}^T 与单位矩阵的 Kronecker 积, 即 $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W}^T \otimes \mathbf{I}_{M_r}$; $\mathbf{R}_e = E[\mathbf{e} \mathbf{e}^H] = \sigma_e^2 \mathbf{I}_{M_r K}$ 表示噪声协方差矩阵, \mathbf{R}_c 和 \mathbf{R}_j 分别表示杂波和干扰的协方差矩阵。

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_c = & E[\mathbf{y}_c \mathbf{y}_c^H] = \\ & \sum_{q=1}^Q \delta_{c,q}^2 \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \mathbf{v}^H(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \tilde{\mathbf{W}}^H \end{aligned} \quad (7)$$

$$\mathbf{R}_j = E[\mathbf{y}_j \mathbf{y}_j^H] = \sum_{l=1}^L \delta_l^2 [\mathbf{I}_K \otimes \mathbf{b}(\theta_{j,l}) \mathbf{b}^H(\theta_{j,l})] \quad (8)$$

利用代数变换, 输出 SCNR 可转换为^[19]

$$\text{SCNR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) = \frac{\delta_t^2 \mathbf{x}^H \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^H \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{cje} \mathbf{x}} = \frac{\delta_t^2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cix} \mathbf{d}} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{W}_1 = \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{v}(r, \theta)$, $\mathbf{d} = \text{vec}(\mathbf{W})$, $\mathbf{R}_{cje} = \mathbf{R}_c + \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e$ 。另外, 有

$$\mathbf{R}_{vx} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^*(r, \theta) \mathbf{v}^T(r, \theta) (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{cix} = & \sum_{q=1}^Q \delta_{c,q}^2 \mathbf{P}(\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^T) \mathbf{v}^*(r_{c,q}, \theta_{c,q}) \cdot \\ & \mathbf{v}^T(r_{c,q}, \theta_{c,q}) (\mathbf{I}_{M_t} \otimes \mathbf{X}^*) \mathbf{P}^T + \alpha(\mathbf{x}) \mathbf{I}_{KM_t} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{X})$, \mathbf{P} 是交换矩阵, $\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{je} \mathbf{x}}{M_t E_t}$,

$\mathbf{R}_{je} = \mathbf{R}_j + \mathbf{R}_e$, E_t 表示每个天线上的发射能量。

因此, 本文研究在每个天线上的能量恒定下, 结合 SCNR 约束要求, 设计发射加权矩阵和接收滤波器使 FDA-MIMO 雷达在目标处的辐射功率最小, 其优化问题的数学表示为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{W}} \quad & P(\mathbf{W}) \\ \text{s.t.} \quad & \text{SCNR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}) \geq \lambda \\ & (\mathbf{W} \otimes \mathbf{W}^*) \mathbf{1}_K = E_t \mathbf{1}_{M_t} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $(\cdot)^*$ 表示共轭运算, λ 表示目标 SCNR 门限, $\mathbf{1}_K$ 表示全 1 向量, E_t 表示每个天线上的能量。第一个约束保证目标的输出 SCNR 不低于一个给定的阈值; 第二个约束表示每个天线上的能量恒定。 $P(\mathbf{W})$ 表示发射信号在目标 (r, θ) 处的功率, 其定义为

$$P(\mathbf{W}) = \mathbf{a}^H(r, \theta) \mathbf{W} \mathbf{W}^H \mathbf{a}(r, \theta) = \|\mathbf{W}^H \mathbf{a}(r, \theta)\|_2^2 \quad (13)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 表示矩阵 2 范数。

针对杂波和干扰情况下低截获问题, 本文将其构成分式规划不等式约束的二次规划问题, 并提出一种循环迭代的方法求解该优化问题。

2 提出的发射波束设计

为了解决优化问题式(12), 本文将其转化成 2 个子优化问题, 利用循环迭代的方法求解: 1) 随机初始化 \mathbf{W} , 利用广义瑞利熵求解 \mathbf{x} ; 2) 根据获得的 \mathbf{x} , 基于辅助变量和 ADMM 求解 \mathbf{W} 。

2.1 接收滤波器优化

观察式(12)可知, 在已知发射波束矩阵 \mathbf{W} 时, 式(12)的目标函数与 \mathbf{x} 无关。于是, 式(12)可转化为关于 \mathbf{x} 的无约束优化问题

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{W}_1 \mathbf{W}_1^H \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{R}_{cje} \mathbf{x}} \quad (14)$$

式(14)的目标函数是一个广义瑞利熵, 因此, 很容易获得式(14)的优化解为

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{R}_{cje}^{-1} \mathbf{W}_1}{\mathbf{W}_1^H \mathbf{R}_{cje}^{-1} \mathbf{W}_1} \quad (15)$$

2.2 发射波束优化

下面考虑在获得 \mathbf{x} 情况下, 利用 ADMM 求解 \mathbf{W} 。首先, 利用矩阵变换, 式(12)的优化问题可等价变换为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\delta_t^2 \mathbf{d}^H \mathbf{R}_{vx} \mathbf{d}}{\mathbf{d}^H \mathbf{R}_{cvx} \mathbf{d}} \geq \lambda \\ & \mathbf{d}^H \mathbf{d} = M_t E_t \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\mathbf{R}_A = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{A}(r, \theta)$, $\mathbf{A}(r, \theta) = \mathbf{a}(r, \theta) \mathbf{a}^H(r, \theta)$ 。

式(16)中的不等式约束是分式规划问题, 该问

题很难求解。对此, 本文将式(16)转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{G}_t \mathbf{d} \leq b_t, \mathbf{d}^H \mathbf{d} = M_t E_t \end{aligned} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{G}_t = \lambda'_t \mathbf{R}_{cvx} - \mathbf{R}_{vx}$, $\lambda' = \frac{\lambda}{\delta_t^2}$, $b_t = 0$ 。

针对式(17)的不等式约束优化问题, 可以采用 SDP 方法求解。然而, 基于 SDP 的方法需要很高的计算复杂度, 且其收敛性也无法保证。对此, 本文利用 ADMM 求解式(17)。首先引入辅助变量 z_t , 将式(17)转化为等式约束, 即

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, z_t} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{G}_t \mathbf{d} + z_t = b_t, z_t \geq 0 \\ & \mathbf{d}^H \mathbf{d} = M_t E_t \end{aligned} \quad (18)$$

为了获得式(18)的有效解, 引入辅助变量 \mathbf{h} , 且令 $\mathbf{h} = \mathbf{d}$, 则式(18)转化为

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}, \mathbf{h}, z_t} \quad & \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{h}^H \mathbf{G}_t \mathbf{d} + z_t - b_t = 0, z_t \geq 0 \\ & \mathbf{h}^H \mathbf{d} - M_t E_t = 0 \\ & \mathbf{h} - \mathbf{d} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

本文利用 ADMM 的缩放形式解决式(19)。在 ADMM 的框架下, 通过引入变量 $\tau_t, \mathbf{u}, \mathbf{v}$, 可以将等式约束转化到增广拉格朗日函数中, 即式(19)的增广拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} f_t(\mathbf{d}, \mathbf{h}, z_t, \tau_t, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \mathbf{d}^H \mathbf{R}_A \mathbf{d} + \frac{\rho_1}{2} \\ & \|\mathbf{h}^H \mathbf{G}_t \mathbf{d} + z_t - b_t + \tau_t\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \\ & \|\mathbf{h} - \mathbf{d} + \mathbf{u}\|^2 + \frac{\rho_3}{2} \|\mathbf{h}^H \mathbf{d} - M_t E_t + \mathbf{v}\|^2 \end{aligned} \quad (20)$$

其中, $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$ 为惩罚参数。

简单来说, ADMM 通过如下迭代的方式解决式(19)。1) 求解使式(20)最小的 \mathbf{h} , 此时 \mathbf{h} 的求解依赖于 $\mathbf{d}, z_t, \tau_t, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 和 \mathbf{x} , 其中, \mathbf{x} 是由式(15)获得, $\mathbf{d}, z_t, \tau_t, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 是由初始值 (可以是随机数) 获得。2) 根据获得的 \mathbf{h} , 求解使式(20)最小的 \mathbf{d} , 此时 \mathbf{d} 的求解依赖于 $\mathbf{h}, z_t, \tau_t, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 和 \mathbf{x} 。3) 同理获得 z_t 。4) 根据获得的 $\mathbf{d}, \mathbf{h}, z_t$, 更新变量 τ_t 。5) 根据获得的 $\mathbf{d}, \mathbf{h}, z_t, \tau_t$, 更新变量 \mathbf{u} 。6) 同理更新变量 \mathbf{v} 。具体地, 在第 $(n+1)$ 次迭代中, ADMM 的更新步骤如下。

1) 根据第 n 次迭代值 $\{d^n, z_i^n, \tau_i^n, u^n, v^n\}$, 求解 h^{n+1} 。式(19)的最小化问题转化为

$$\min_h \frac{\rho_1}{2} \|h^H G_i d^n + \tilde{\tau}_i^n\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \|h - d^n + u^n\|^2 + \frac{\rho_3}{2} \|h^H d^n - M_i E_i + v^n\|^2 \quad (21)$$

其中, $\tilde{\tau}_i = z_i - b_i + \tau_i$ 。

为了获得式(21)的最小值, 本文对式(21)求关于 h 导数, 并使导数为 0, 即对式(21)中的三项分别求关于 h 导数, 可得

$$\nabla_h \|h^H G_i d^n + \tilde{\tau}_i^n\|^2 = 2G_i d^n (d^n)^H G_i^H h + 2G_i d^n (\tilde{\tau}_i^n)^H \quad (22)$$

$$\nabla_h \|h - d^n + u^n\|^2 = 2h - 2(d^n - u^n) \quad (23)$$

$$\nabla_h \|h^H d^n - M_i E_i + v^n\|^2 = 2d^n (d^n)^H h - 2d^n (M_i E_i - v^n)^H \quad (24)$$

于是, 利用 $\nabla_h f_i(d^n, h, z_i^n, \tau_i^n, u^n, v^n) = 0$, 可得 h^{n+1} 的解为

$$h^{n+1} = \Omega^{-1} \gamma \quad (25)$$

其中, 有

$$\Omega = \rho_1 G_i d^n (d^n)^H G_i^H + \rho_2 I + \rho_3 d^n (d^n)^H \quad (26)$$

$$\gamma = \rho_2 (d^n - u^n) + \rho_3 d^n (M_i E_i - v^n)^H - \rho_1 G_i d^n (\tilde{\tau}_i^n)^H \quad (27)$$

2) 根据迭代值 $\{h^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, u^n, v^n\}$, 求解 d^{n+1} 。此时优化问题式(19)转化为

$$\min_d d^H R_A d + \frac{\rho_1}{2} \|(h^{n+1})^H G_i d + \tilde{\tau}_i^n\|^2 + \frac{\rho_2}{2} \|h^n - d + u^n\|^2 + \frac{\rho_3}{2} \|(h^{n+1})^H d^n - M_i E_i + v^n\|^2 \quad (28)$$

类似于 h^{n+1} 的求解过程, 使 $\nabla_d f_i(d, h^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, u^n, v^n) = 0$, 可得

$$2R_A d + \rho_1 G_i^H h^{n+1} (h^{n+1})^H G_i d + \rho_2 d^n + \rho_1 G_i^H h^{n+1} \tilde{\tau}_i^n + \rho_3 h^{n+1} (h^{n+1})^H d = \rho_2 (h^{n+1} + u^n) + \rho_3 h^{n+1} (M_i E_i - v^n) \quad (29)$$

可得 d^{n+1} 的值为

$$d^{n+1} = \Gamma^{-1} \eta \quad (30)$$

其中, 有

$$\Gamma = 2R_A + \rho_1 G_i^H h^{n+1} (h^{n+1})^H G_i + \rho_2 I + \rho_3 h^{n+1} (h^{n+1})^H \quad (31)$$

$$\eta = \rho_2 (h^{n+1} + u^n) + \rho_3 h^{n+1} (M_i E_i - v^n) - \rho_1 G_i^H h^{n+1} \tilde{\tau}_i^n \quad (32)$$

3) 根据迭代值 $\{d^{n+1}, h^{n+1}, z_i^n, u^n, v^n\}$, 求解 $\{z_i\}$ 。优化问题式(19)转化为

$$\min_{z_i > 0} \|(h^{n+1})^H G_i d^{n+1} + z_i - b_i + \tau_i^n\|^2 \quad (33)$$

同理, 使 $\nabla_{z_i} f_i(d^{n+1}, h^{n+1}, z_i^n, u^n, v^n) = 0$, 可得

$$z_i^{n+1} = \max\{0, b_i - (h^{n+1})^H G_i d^{n+1} - \tau_i^n\} \quad (34)$$

4) 根据获得的 $\{d^{n+1}, h^{n+1}, z_i^{n+1}\}$, 求解拉格朗日乘子变量 $\{\tau_i, u, v\}$ 。 $\{\tau_i, u, v\}$ 的更新则通过对偶上升方法获得, 即

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i + (h^{n+1})^H G_i d^{n+1} + z_i - b_i \quad (35)$$

$$u^{n+1} = u^n + h^{n+1} - d^{n+1} \quad (36)$$

$$v^{n+1} = v^n + (h^{n+1})^H d^{n+1} - M_i E_i \quad (37)$$

本文推导了杂波情况下波束加权矩阵设计。然而, 本文方法也可解决只有干扰和噪声情况下的加权波束矩阵设计。假设本文方法求解 W 时的外迭代和内迭代次数分别用 k 和 n 表示, 根据上面的推导, 基于 ADMM 的发射波束设计如算法 1 所示。

算法 1 基于 ADMM 的低截获 FDA-MIMO 雷达发射波束设计算法

输入 设置初始值 $\{W^0, z_i^0, \tau_i^0, u^0, v^0\}$, 最大内迭代次数为 N_{\max} , 惩罚参数 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 > 0$ 。

输出 发射波束向量 d 。

1) 定义外迭代 $k=1$;

2) 计算 W_1 和 $R_{c_{je}}$, 利用式(15)优化 x^k ;

3) 利用 x^k 更新 R_{wx} 和 $R_{c_{vx}}$;

4) 定义内迭代 $n=1$, 令 $d^{k,0} = \text{vec}(W^k)$;

5) 利用式(26)和式(27)分别计算 Ω 和 γ , 利用式(25)更新 $h^{k,n+1}$;

6) 利用式(31)和式(32)分别计算 Γ 和 η , 利用式(30)更新 $d^{k,n+1}$;

7) 利用式(34)更新 $z_i^{k,n+1}$;

8) 利用式(35)~式(37)分别更新 $\tau_i^{k,n+1}$ 、 $u^{k,n+1}$ 和 $v^{k,n+1}$;

9) $n = n + 1$, 直到 N_{\max} , 输出 $d^{k+1} = d^{k,n+1}$;

10)直到 \mathbf{x} 和 \mathbf{W} 收敛, 即满足 $|\text{SCNR}^{(k+1)} - \text{SCNR}^{(k)}| < \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$ 。

3 性能分析

3.1 收敛性分析

本文方法每次迭代中需更新 \mathbf{x} 和 \mathbf{W} 。在 $k+1$ 次迭代时, 利用获得的 \mathbf{W}^k 优化 \mathbf{x}^{k+1} 。利用式(14), 有

$$\text{SCNR}(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{W}^k) = \arg \max_{\mathbf{x}} \text{SCNR}(\mathbf{x}, \mathbf{W}^k) \geq \text{SCNR}(\mathbf{x}^k, \mathbf{W}^k) \quad (38)$$

接着, 在固定 \mathbf{x}^{k+1} 时, 优化 \mathbf{W}^{k+1} 。本文利用 ADMM 更新 \mathbf{W}^{k+1} , 内部迭代更新为

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}^n, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\rightarrow \\ f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\rightarrow \\ f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\rightarrow \\ f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^{n+1}, \tau_i^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}) &\quad (39) \end{aligned}$$

利用求解式(21)的最小化问题, 在 $n+1$ 次迭代时, 更新 \mathbf{h}^{n+1} , 有

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}^n, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\geq \\ \arg \min_{\mathbf{h}} f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &= \\ f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\quad (40) \end{aligned}$$

类似地, 利用式(28), 更新 \mathbf{d}^{n+1} , 有

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{d}^n, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &= \\ \arg \min_{\mathbf{d}} f_i(\mathbf{d}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\geq \\ f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &\quad (41) \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^n, \tau_i^n, \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^n) &= \\ \arg \min_{\tau_i} f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i, \tau_i, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &\geq \\ f_i(\mathbf{d}^{n+1}, \mathbf{h}^{n+1}, z_i^{n+1}, \tau_i^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1}) &\quad (42) \end{aligned}$$

综上, 结合式(40)~式(42), 有

$$P(\mathbf{W}^{k+1}) \leq P(\mathbf{W}^k) \quad (43)$$

即证明本文所提方法是收敛的。

3.2 计算复杂度分析

本文方法的计算复杂度随着外迭代次数线性增加。在外迭代中, \mathbf{x} 的更新需要计算矩阵逆, 其复杂度为 $O(M_t^3 K^3)$; 在内迭代中, 需要更新

$\{\mathbf{d}, \mathbf{h}, z_i, \tau_i, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ 。更新 \mathbf{h} 需要计算 $\mathbf{\Omega}$ 、 $\boldsymbol{\gamma}$ 和矩阵逆, 其复杂度分别为 $O(M_t^2 K^2)$ 、 $O(M_t^2 K^2)$ 和 $O(M_t^3 K^3)$, 所以, 更新 \mathbf{h} 的计算复杂度为 $O(2M_t^2 K^2 + M_t^3 K^3)$ 。同样, 更新 \mathbf{d} 的计算复杂度为 $O(2M_t^2 K^2 + M_t^3 K^3)$ 。更新 $\{z_i, \tau_i, \mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ 的计算复杂度为 $O(2M_t^2 K^2 + 2M_t K)$ 。因此, 本文方法的总计算复杂度为 $O(6M_t^2 K^2 + 2M_t^3 K^3 + 2M_t K + M_r^3 K^3)$ 。

4 仿真分析

本节利用实验验证在存在杂波、干扰和噪声情况下, 对比分析本文方法与文献[11]中的SDP方法的性能。实验中FDA-MIMO雷达系统的参数设置如下: 发射天线和接收天线数分别为 $M_t = 8$ 和 $M_r = 8$; 雷达工作频率为 $f_0 = 1$ GHz, 频率步进量为 $\Delta f = 3$ MHz; 每个天线上的发射能量为 $E_t = 1$ 。目标空间位置为 $(50 \text{ m}, 10^\circ)$, 其功率为 20 dB; 3 个与发射信号相干的点杂波位于 $(50 \text{ m}, -50^\circ)$ 、 $(25 \text{ m}, 10^\circ)$ 和 $(75 \text{ m}, 40^\circ)$, 且杂波功率均为 30 dB; 2 个干扰信号分别来自 -30° 和 60° , 其功率均为 35 dB; 高斯噪声的协方差为 $\sigma_e^2 = 0$ 。

4.1 对比分析收敛性和输出 SCNR 的变化情况

本节实验对比分析了在不同 K 和 λ 时, 本文方法和 SDP 方法的收敛性能以及功率随天线变化情况, 如图 1 所示。图 1 中没有标出 K 或 λ 值时默认 $K=8$, $\lambda=18$ dB。图 1(a)和图 1(b)分别显示了式(12)中的目标函数和输出 SCNR 随迭代次数的变化情况。由图 1(a)可知, 本文方法和 SDP 方法都可以很快收敛, 但本文方法收敛后的稳定性更好; 本文方法的目标函数随着正交波形数目 K (λ 恒定) 增加而减小; 而基本上不受 λ ($K=8$) 的影响, 这也验证了目标函数只与 K 有关而与 λ 无关。从图 1(b)可知, 相比 SDP 方法, 本文方法的输出 SCNR 随着 λ (K 恒定) 增加而增加, 这也说明 SCNR 门限值越高, 可用来设计发射波束矩阵的自由度越多。此外, 由图 1(a)和图 1(b)可知, 本文方法经过 10 次迭代后满足了停止条件。

图 1(c)和图 1(d)分别对比了输出 SCNR 随杂噪比 (CNR, clutter-to-noise ratio) 和信噪比 (SNR, signal-to-noise ratio) 变化情况。由图 1(c)和图 1(d)可知, 当 $\lambda=18$ dB 和 $K=8$ 时, SDP 方法输出 SCNR 优于本文方法; 但其他情况下, 本文方法的 SCNR 要优于 SDP 方法。从图 1(d)也可以看到, 本文方法和 SDP 方法的输出 SCNR 随 SNR 的增加而线性增加。图 1(e)对比了在迭代次数为 300 时, 本文方法和

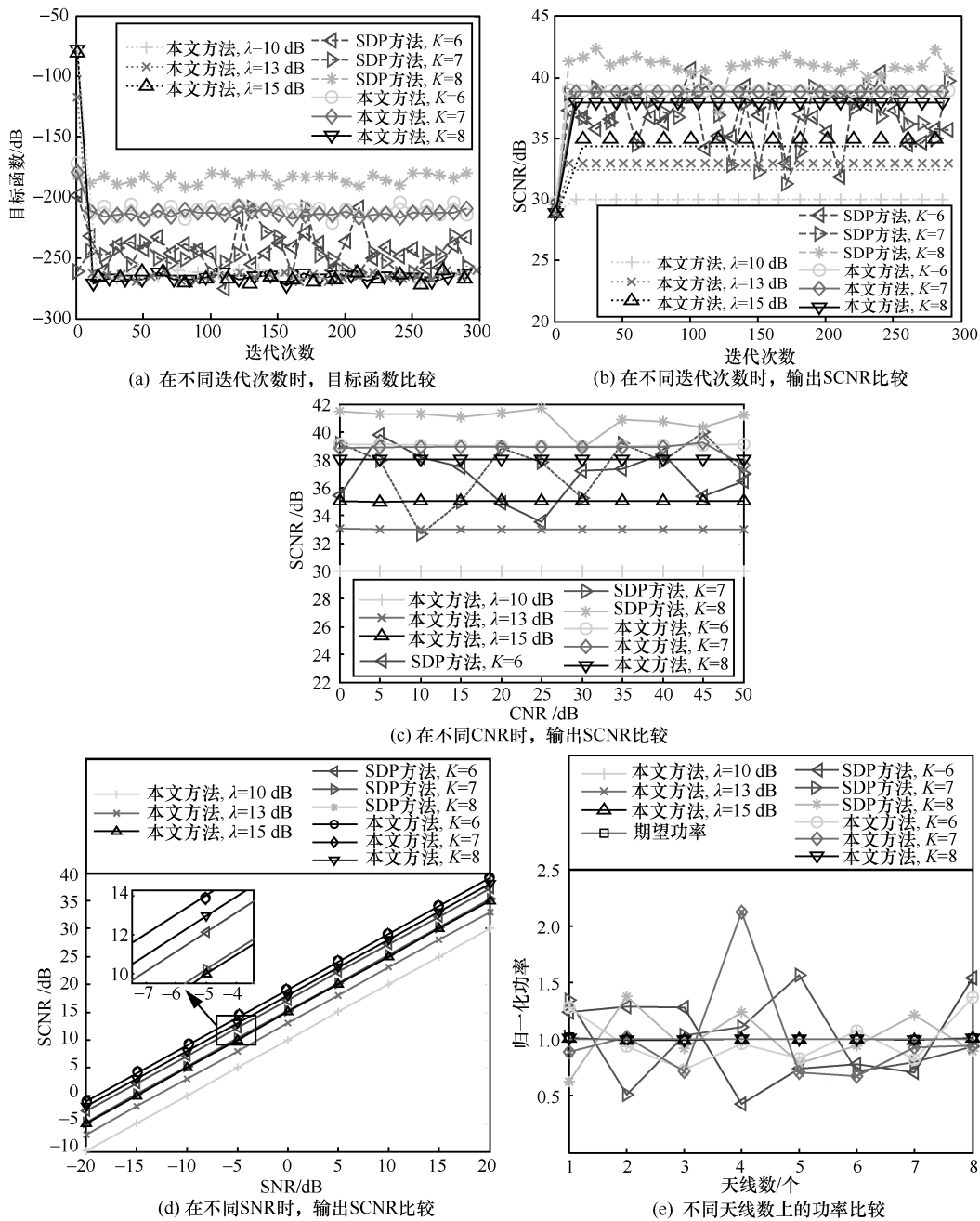


图 1 收敛性能和功率比较

SDP 方法的不同天线数上的发射功率比较。从图 1(e) 可知，相比 SDP 方法，本文方法在 $K=8$ 时能更有效地控制发射功率恒定。

4.2 对比在目标位置处的发射和接收方向图

图 2 对比了在 $\lambda=18$ dB 和不同 K 值时，本文方法和 SDP 方法在目标位置处的发射和接收方向图。由图 2(a)和图 2(b)可知，不管在距离维还是角度维，本文方法和 SDP 方法的发射方向图在目标位置处形成的零陷随着 K 增加而增加。此外，在相同 K 值时，相比 SDP 方法，本文方法的发射方向图在目标处形

成更深的零陷。

从图 2(c)可知，在角度维的主瓣区域，本文方法比 SDP 方法能更好地聚焦。SDP 方法在杂波位置 -50° 处没有形成零陷；而本文方法在杂波位置 -50° 和 10° ，以及干扰 -30° 和 60° 处，形成的零陷都低于 SDP 方法。由图 2(d)可知，在距离维的主瓣区域，本文方法能更好地在目标距离 50 m 处能量聚焦，而 SDP 方法聚焦性能较差。在杂波位置 25 m，本文方法和 SDP 方法都形成了准确的零陷，分别为 -100 dB 和 -59 dB。因此，不管在距离维还是角度

维, 本文方法和 SDP 方法的接收方向图在杂波和干扰信号处形成的零陷随着 K 增加而增加; 但在相同 K 值时, 相比 SDP 方法, 本文方法的发射方向在杂波和干扰处形成更深的零陷。

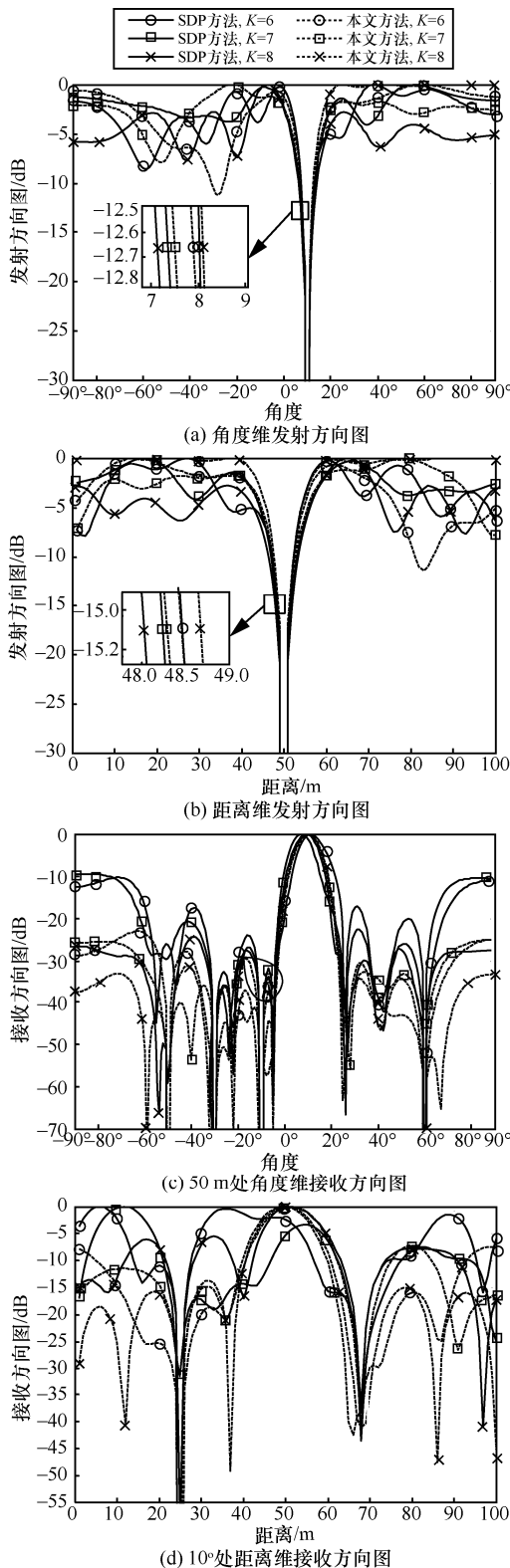


图 2 发射方向图和接收方向图比较

3) 对比分析在杂波位置处的接收方向图

本文方法和 SDP 方法在杂波位置处的接收方向图如图 3 所示。图 3(a)和图 3(b)显示了本文方法和 SDP 方法分别在 25 m 和 75 m 处角度维的接收方向图。由图 3(a)和图 3(b)可知, 本文方法和 SDP 方法在杂波 10° 和 40° , 以及干扰 -30° 和 60° 处, 分别形成了 -100 dB 和 -50 dB 以上的零陷。图 3(c)展示了本文方法和 SDP 方法在 40° 处距离维的接收方向图。从图 3(c)可知, 本文方法在杂波 75 m 处形成了至少 -80 dB 以上的零陷, 而 SDP 方法没有抑制 75 m 处的波。

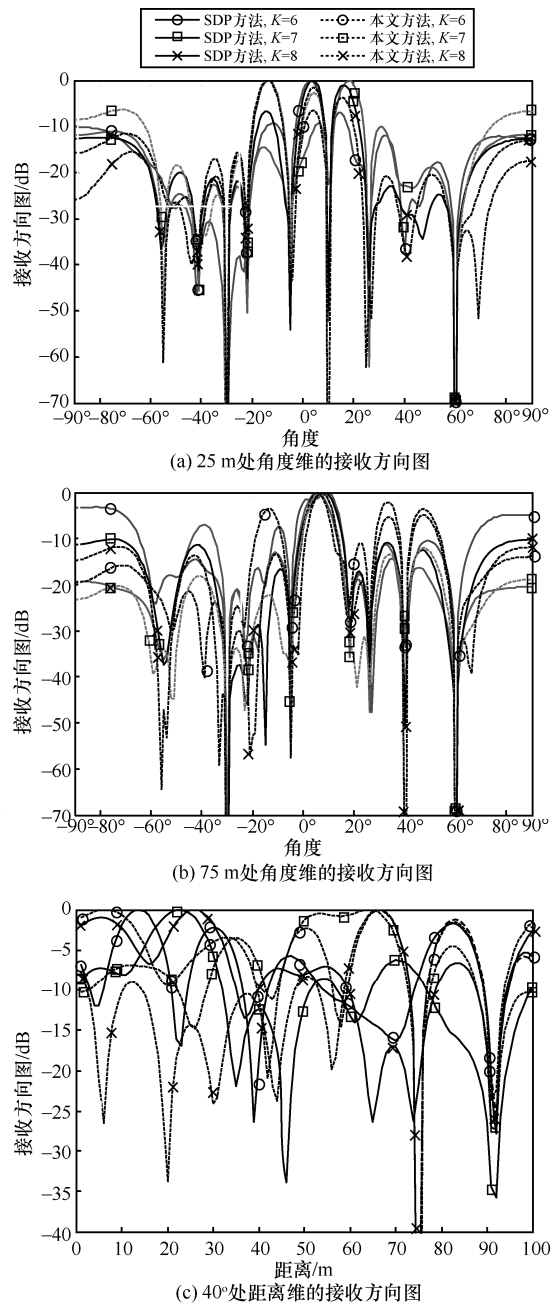


图 3 接收方向图在杂波位置处比较

图4(a)和图4(b)分别展示了在 $\lambda=18$ dB和 $K=8$ 值时, SDP方法和本文方法设计波形的回波能量在距离-方位域的分布情况。由图4可知,与SDP方法相比,本文方法在干扰和杂波处的线条颜色更深,表明在干扰和杂波处形成了更深的零陷。总之,相比SDP方法,本文方法除了能够保证目标检测性能,并实现目标二维(距离-方位)区域上辐射能量控制外,能更加有效抑制杂波和干扰信号。

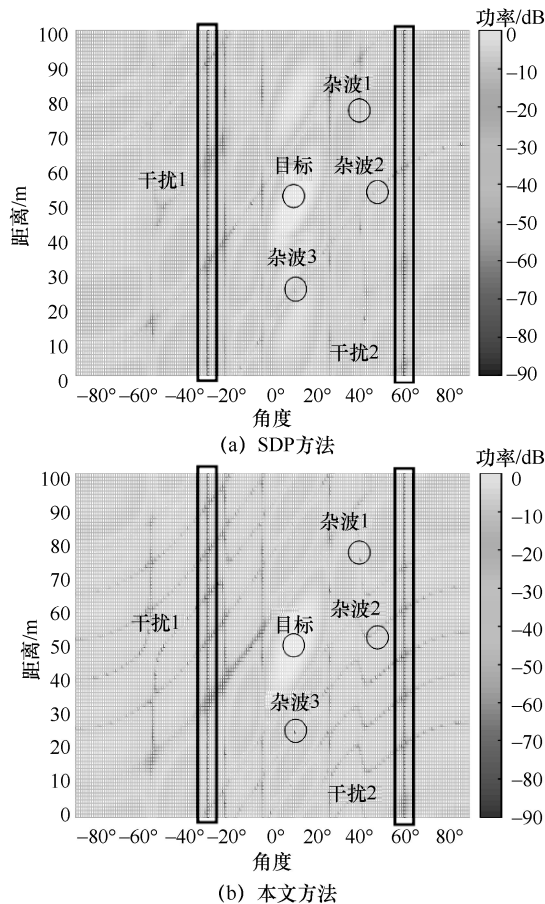


图4 不同方法设计波形的回波能量分布

5 结束语

针对杂波情况下LPI问题,本文提出一种基于ADMM改进的FDA-MIMO雷达发射波束设计方法。该方法在保证SCNR要求的条件下抑制杂波和干扰的同时,最小化目标二维空间区域的能量辐射。仿真结果表明,与SDP方法相比,在相同 K 值时,本文方法能有效控制每个天线上的发射功率恒定。本文方法除了能够保证目标检测性能,并实现目标二维(距离-方位)区域上辐射能

量控制外,能更加有效地抑制杂波和干扰信号。此外,本文方法也可解决只有干扰和噪声情况下的发射波束设计。

参考文献:

- [1] CHEN K J, YANG S W, CHEN Y K, et al. Transmit beamforming based on 4-D antenna arrays for low probability of intercept systems[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2020, 68(5): 3625-3634.
- [2] LAWRENCE D E. Low probability of intercept antenna array beamforming[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(9): 2858-2865.
- [3] TANG B, TANG J. Joint design of transmit waveforms and receive filters for MIMO radar space-time adaptive processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(18): 4707-4722.
- [4] CUI G L, YU X X, CAROTENUTO V, et al. Space-time transmit code and receive filter design for colocated MIMO radar[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(5): 1116-1129.
- [5] WANG Y X, LI W, SUN Q L, et al. Robust joint design of transmit waveform and receive filter for MIMO radar space-time adaptive processing with signal-dependent interferences[J]. IET Radar, Sonar & Navigation, 2017, 11(8): 1321-1332.
- [6] WU L L, BABU P, PALOMAR D P. Transmit waveform/receive filter design for MIMO radar with multiple waveform constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(6): 1526-1540.
- [7] CHENG Z Y, HE Z S, LIAO B, et al. MIMO radar waveform design with PAPR and similarity constraints[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66(4): 968-981.
- [8] IMANI S, GHORASHI S A. Transmit signal and receive filter design in co-located MIMO radar using a transmit weighting matrix[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(10): 1521-1524.
- [9] 黄俊生, 苏洪涛. 二维相控阵-MIMO 雷达联合发射子阵划分和波束形成设计方法[J]. 电子与信息学报, 2020, 42(7): 1557-1565.
- [10] HUANG J S, SU H T. Joint transmitting subarray partition and beamforming design method based on two-dimensional phased-MIMO radar[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2020, 42(7): 1557-1565.
- [10] ZHOU J W, LI H B, CUI W. Joint design of transmit and receive beamforming for transmit subaperturing MIMO radar[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2019, 26(11): 1648-1652.
- [11] CHENG Z Y, LIAO B, HE Z S, et al. Joint design of the transmit and receive beamforming in MIMO radar systems[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(8): 7919-7930.
- [12] WANG W Q. Frequency diverse array antenna: new opportunities[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2015, 57(2): 145-152.
- [13] 巩朋成, 刘刚, 黄禾, 等. 频控阵 MIMO 雷达中基于稀疏迭代的多

- 维信息联合估计方法[J]. 雷达学报, 2018, 7(2): 194-201.
- GONG P C, LIU G, HUANG H, et al. Multidimensional parameter estimation method based on sparse iteration in FDA-MIMO radar[J]. Journal of Radars, 2018, 7(2): 194-201.
- [14] ANTONIK P, WICKS M C, GRIFFITHS H D, et al. Frequency diverse array radars[C]//Proceedings of 2006 IEEE Conference on Radar. Piscataway: IEEE Press, 2006: 3.
- [15] WANG W Q. Moving-target tracking by cognitive RF stealth radar using frequency diverse array antenna[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2016, 54(7): 3764-3773.
- [16] GONG P C, WANG W Q, LI F C, et al. Sparsity-aware transmit beamspace design for FDA-MIMO radar[J]. Signal Processing, 2018, 144: 99-103.
- [17] 许京伟, 廖桂生, 张玉洪, 等. 波形分集阵列雷达抗欺骗式干扰技术[J]. 电子学报, 2019, 47(3): 545-551.
- XU J W, LIAO G S, ZHANG Y H, et al. On anti-jamming technique with waveform diverse array radar[J]. Acta Electronica Sinica, 2019, 47(3): 545-551.
- [18] STEPHEN B, NEAL P, ERIC C, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Distributed Optimization and Statistical Learning Via the Alternating Direction Method of Multipliers, 2010, 3(1): 1-122.
- [19] 巩朋成, 王兆彬, 谭海明, 等. 杂波背景下基于交替方向乘子法的

低截获频控阵 MIMO 雷达收发联合优化方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(5): 1267-1274.

GONG P C, WANG Z B, TAN H M, et al. Joint design of the transmit and receive beamforming via alternating direction method of multipliers for LPI of frequency diverse array MIMO radar in the presence of clutter[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2021, 43(5): 1267-1274.

[作者简介]



巩朋成(1982-), 男, 甘肃甘谷人, 博士, 武汉工程大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为频率分集阵列雷达、MIMO 雷达信号处理。



吴云韬(1973-), 男, 湖北利川人, 博士, 武汉工程大学教授、博士生导师, 主要研究方向为阵列信号处理。